Dio teorije

§ 7. Tangentna ravnina i normala

7.1. Definicija

a) Ako u danoj točki M plohe povučemo na plohi sve moguće krivulje, onda tangente na te krivulje u točki M leže u jednoj ravnini koja se zove *tangentna (ili tangencijalna) ravnina* na plohu u točki M (vidi sl. 43). (Izuzetak su singularne točke plohe.) Tangencijalna ravnina određena je vektorima:

$$\vec{r}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\,\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\,\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\,\vec{k} \quad \text{i} \quad \vec{r}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\,\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\,\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\,\vec{k}$$

koji diraju u-krivulje i v-krivulje u točki M.

Vektor tangente krivulje $\alpha : I \to S$ na plohi dane prikazom $\vec{r}(t) = \vec{r}(u(t), v(t))$, $\forall t \in I$, dan je izrazom:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.$$

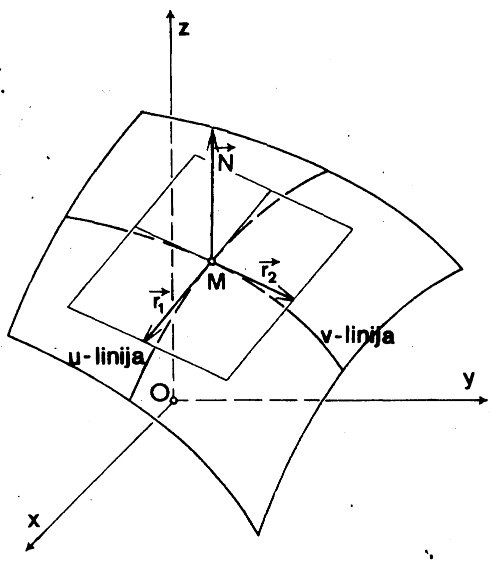
Pravac koji prolazi točkom M okomito na tangentnu ravninu zove se *normala* na plohu u točki M. Vektor paralelan normali ima jednadžbu:

$\vec{N} = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2$, odnosno:

$$\vec{N} = \frac{\partial (y, z)}{\partial (u, v)}\,\vec{i} + \frac{\partial (z, x)}{\partial (u, v)}\,\vec{j} + \frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)}\,\vec{k}.$$

Jedinični vektor normale glasi:

$$\vec{N}^0 = \frac{\vec{r}_1 \times \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}.$$



Sl. 43.

b) *Regularne i singularne točke plohe. Singularne točke koordinatne (parametarske) mreže.* Točke plohe u kojima egzistira jedna jednoznačno definirana tangencijalna ravnina zovu se *regularne točke plohe* i za njih vrijedi uvjet (6) iz § 6, tj.

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$$

barem za jednu parametrizaciju.

Tada vektori $\vec{r}_u$ i $\vec{r}_v$ određuju tangencijalnu ravninu i nisu kolinearni. Zbog toga što je uvjet (6) uvijek ispunjen sve točke plohe jesu regularne. *Singularne točke plohe* su one u kojima nije definirana tangencijalna ravnina i za koje vrijedi:

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \vec{0},$$

za svaku parametrizaciju u kojoj su $\vec{r}_u$ i $\vec{r}_v$ definirani, ako takva parametrizacija uopće postoji.

Singularne točke koordinatne ili parametarske mreže.

Uslov:

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \vec{0}$$

može izražavati i singularnost parametarske mreže plohe. Naime, on može biti ispunjen u *pojedinim točkama* plohe a da te točke ipak ne budu singularne točke plohe. *Takve točke zovu se tada singularne točke parametarske ili koordinatne mreže.*

Naprimjer polovi kugle ili rotacionog elipsoida su singularne točke koordinatne mreže, u njima se sastaju svi meridijani. Međutim, navedene plohe imaju i u tim točkama potpuno definiranu jednu jedinu tangencijalnu ravninu (vidi zad. 266. 2°, a zatim zad. 272. i 323).

7.2. Jednadžba tangentne ravnine

Tablica 4.

Zadana ploha ima jednadžbu	Tangentna ravnina
$F(x, y, z) = c$	$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 (z - z_0) = 0$
$z = f(x, y)$	$z - z_0 = p_0(x - x_0) + q_0(y - y_0)$
$x = x(u, v)$ $y = y(u, v)$ $z = z(u, v)$	$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_0 & \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_0 & \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_0 & \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_0 & \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_0 \end{vmatrix} = 0$ ili: $\left(\frac{\partial (y, z)}{\partial (u, v)_0}\right) (x - x_0) + \left(\frac{\partial (z, x)}{\partial (u, v)_0}\right) (y - y_0) + \left(\frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)_0}\right) (z - z_0) = 0$
$\vec{r}(u,v) = x(u, v)\, \vec{i} +$ $+ y(u, v)\, \vec{j} + z(u, v)\, \vec{k}$	$(\vec{\varrho} - \vec{r}_0) \cdot \left(\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right)_0 \times \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)_0\right) = 0$ ili: $(\vec{\varrho} - \vec{r}_0) \cdot \vec{N}_0 = 0$

7.3. Jednadžba normale

Tablica 5.

Zadana ploha	Normala
$F(x, y, z) = c$	$\dfrac{x - x_0}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)_0} = \dfrac{y - y_0}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)_0} = \dfrac{z - z_0}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)_0}$
$z = f(x, y)$	$\dfrac{x - x_0}{p_0} = \dfrac{y - y_0}{q_0} = \dfrac{z - z_0}{-1}$
$x = x(u, v)$ $y = y(u, v)$ $z = z(u, v)$	$\dfrac{x - x_0}{\begin{vmatrix} \left(\dfrac{\partial y}{\partial u}\right)_0 & \left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)_0 \\ \left(\dfrac{\partial y}{\partial v}\right)_0 & \left(\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)_0 \end{vmatrix}} = \dfrac{y - y_0}{\begin{vmatrix} \left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)_0 & \left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)_0 \\ \left(\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)_0 & \left(\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)_0 \end{vmatrix}} = \dfrac{z - z_0}{\begin{vmatrix} \left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)_0 & \left(\dfrac{\partial y}{\partial u}\right)_0 \\ \left(\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)_0 & \left(\dfrac{\partial y}{\partial v}\right)_0 \end{vmatrix}}$ ili $\dfrac{x - x_0}{\left(\dfrac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\right)_0} = \dfrac{y - y_0}{\left(\dfrac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\right)_0} = \dfrac{z - z_0}{\left(\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right)_0}$
$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} +$ $+ y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$	$\vec{\varrho} = \vec{r}_0 + \lambda\left(\left(\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right)_0 \times \left(\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)_0\right)$ ili $\vec{\varrho} = \vec{r}_0 + \lambda \vec{N}_0$

U tablicama 4. i 5. su x_0, y_0, z_0 i $\vec{r}_0$ koordinate i radijvektor točke M plohe S, a x, y, z i $\vec{\varrho}$ koordinate i radijvektor točke u tangencijalnoj ravnini odnosno normali. Derivacije se računaju u točki M $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x} = p, \dfrac{\partial z}{\partial y} = q\right)$.

Napomena:

U daljnjem tekstu pojavljivat će se parcijalne derivacije, kao npr.:

$$\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial v^2},$$

i druge.

Te ćemo parcijalne derivacije ponekad kraće obilježiti ovako:

x_u, y_u, z_u, x_v, y_v, z_v, $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$, $\vec{r}_{uu}$, $\vec{r}_{uv}$, $\vec{r}_{vv}$, i druge.

Izabrani zadaci za vježbu
(iz lekcije "Tangentna ravan i normala na površ")

245. Naći tangencijalnu ravninu i normalu plohe (helikoida):

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = av, \quad u, v \in \mathbf{R}$$

u proizvoljnoj točki M plohe.

Vektorska jednadžba zadane plohe glasi:

$$\vec{r} = u\cos v\ \vec{i} + u\sin v\ \vec{j} + a\,v\ \vec{k}.$$

Tada je:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & a \end{vmatrix} =$$

$$= a\sin v\ \vec{i} - a\cos v\ \vec{j} + u\ \vec{k}.$$

Koristimo li vektorsku jednadžbu tangentne ravnine i normale koja odgovara zadanoj plohi (vidi tablice 4. i 5) tada je:

tangencijalna ravnina:

$a\sin v(X - u\cos v) - a\cos v(Y - u\sin v) + u(Z - a\,v) = 0$, odnosno:

$$a\sin v\ X - a\cos v\ Y + u\ Z - auv = 0,$$

normala:

$$\frac{X - u\cos v}{a\sin v} = \frac{Y - u\sin v}{-a\cos v} = \frac{Z - av}{u}.$$

246. Na plohi $xyz = 1$ naći tangentnu ravninu paralelnu s ravninom $2x + y - 3z + 5 = 0$.

Prvi način (vektorski):

Želimo li napisati vektorsku jednadžbu plohe, tada ona glasi (vidi zad. 214):

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + \frac{1}{xy}\,\vec{k}.$$

Moramo naći točku na plohi (diralište) u kojoj je tangentna ravnina paralelna sa zadanom ravninom, tj. u kojoj su pripadni vektori normala paralelni ($\vec{N}_T$ i $\vec{N}_R$).

Kako je: $\qquad \vec{N}_T = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \frac{1}{x^2 y}\,\vec{i} + \frac{1}{xy^2}\,\vec{j} + \vec{k},$

tada mora biti:

$$\vec{N}_T\left(\frac{1}{x^2y},\ \frac{1}{xy^2},\ 1\right) \text{ paralelan s } \vec{N}_R\left(-\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3},\ 1\right).$$

Odavde dobijemo usporedivši koordinate gornjih vektora:

$$\frac{1}{x^2y} = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{xy^2} = -\frac{1}{3},$$

koordinate tražene točke:

$$D = \left(-\sqrt[3]{\frac{3}{4}},\ -2\sqrt[3]{\frac{3}{4}},\ \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right).$$

Jednadžba pripadne tangentne ravnine glasi:

$$\frac{1}{x^2y}(X-x) + \frac{1}{xy^2}(Y-y) + (Z-z) = 0,$$

odnosno:

$$\frac{z}{x}(X-x) + \frac{z}{y}(Y-y) + xyz(Z-z) = 0,$$

odnosno u točki D:

$$2x + y - 3z + 6\sqrt[3]{\frac{3}{4}} = 0.$$

Drugi način (skalarni).

Točku u kojoj postavljamo tangentnu ravninu naći ćemo ovako:

a) Ako plohu predočimo parametarskim jednadžbama:

$$X = x, \qquad Y = y, \qquad Z = \frac{1}{xy},$$

tada vektori:

$$\vec{N}_T\left(\frac{\partial(Y,\ Z)}{\partial(x,\ y)},\ \frac{\partial(Z,\ X)}{\partial(x,\ y)},\ \frac{\partial(X,\ Y)}{\partial(x,\ y)}\right)$$

i

$$\vec{N}_R(2,\ 1,\ -3)$$

moraju biti paralelni (kolinearni).

b) Ako plohu napišemo pomoću implicitne jednadžbe $F(x, y, z) = c : xyz = 1$, tada vektori:

$$\vec{N}_T\left(\frac{\partial F}{\partial x},\ \frac{\partial F}{\partial y},\ \frac{\partial F}{\partial z}\right) = \vec{N}(yz,\ xz,\ xy)$$

i

$$\vec{N}_R(2,\ 1,\ -3)$$

moraju biti paralelni (kolinearni).

Iz uvjeta kolinearnosti tih dvaju vektora dobije se točka (diralište), npr.:

$$\frac{\partial(Y,Z)}{\partial(x,y)}=2k,\quad \frac{\partial(Z,X)}{\partial(x,y)}=k,\quad \frac{\partial(X,Y)}{\partial(x,y)}=-3k,$$

odnosno:

$$\begin{vmatrix} 0 & -\dfrac{1}{x^2y} \\ 1 & -\dfrac{1}{xy^2} \end{vmatrix}=2k,\quad \begin{vmatrix} -\dfrac{1}{x^2y} & 1 \\ -\dfrac{1}{xy^2} & 0 \end{vmatrix}=k,\quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-3k$$

odakle se dobiju isti uvjeti za točku D kao na prvi način.

247. Zadana je ploha S parametrizacijom:

$x=v\cos u-\phi(u)\cos u+\phi'(u)\sin u$

$y=v\sin u-\phi(u)\sin u-\phi'(u)\cos u$

$z=\sqrt{2v}$,

$u\in[-\pi,\pi]$, $\qquad v\geqslant 0$.

Naći projekciju dužine normale od točke plohe do točke u kojoj normala siječe ravninu XOY.

Radimo skalarno, pa računajmo Jakobijane:

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} v\cos u-\phi'\sin u-\phi\cos u-\phi''\cos u+\phi'\sin u & 0 \\ \sin u & \dfrac{1}{\sqrt{2v}} \end{vmatrix}=$$

$$=-\frac{\cos u}{\sqrt{2v}}(-v+\phi+\phi'').$$

Na sličan način je:

$$\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}=\frac{\sin u}{\sqrt{2v}}(-v+\phi+\phi'')$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=-v+\phi+\phi''.$$

Jednadžba normale tada glasi:

$$\frac{X - v\cos u + \phi\cos u - \phi'\sin u}{-\frac{\cos u}{\sqrt{2v}}(-v + \phi + \phi'')} = \frac{Y - v\sin u + \phi\sin u + \phi'\cos u}{\frac{\sin u}{\sqrt{2v}}(-v + \phi + \phi'')} =$$

$$= \frac{Z - \sqrt{2v}}{-v + \phi + \phi''},$$

odnosno kraće:

$$\frac{X - x}{-\cos u} = \frac{Y - y}{\sin u} = \frac{Z - z}{\sqrt{2v}} = t.$$

Da bismo našli probodište P_1 normale s ravninom XOY, moramo jednadžbu normale napisati u parametarskom obliku:

$$X = x - t\cos u$$

$$Y = y + t\sin u$$

$$Z = z - \sqrt{2v}\,t$$

i naći takav parametar t, da bude $Z = 0$.
Tada je $z + \sqrt{2v}\ t = 0$, odnosno $\sqrt{2v} + \sqrt{2v}\ t = 0$, $t = -1$, pa su koordinate točke $P_1 = (x + \cos u,\ y - \sin u,\ 0)$.
Projekcija točke T na plohi je točka $P_2 = (x,\ y,\ 0)$.
Tada je tražena projekcija dužine normale dužina $\overline{P_1P_2}$, pa je $\overline{P_1P_2}^2 =$
$= (x - x - \cos u)^2 + (y - y + \sin u)^2 = 1$, dakle $\overline{P_1P_2} = 1$.

248. Naći tangentnu ravninu na plohu:

$$x = u + v, \qquad y = u^2 + v^2, \qquad z = u^3 + v^3, \qquad u, v \in \mathbf{R},$$

u točki $M = (3,\ 5,\ 9)$.

249. Napisati jednadžbu tangentne ravnine na plohu:

$$x = 2u - v, \qquad y = u^2 + v^2, \qquad z = u^3 - v^3, \qquad u, v \in \mathbf{R},$$

u točki $M = (3,\ 5,\ 7)$.

250. Napisati jednadžbu tangentne ravnine i normale na plohu:

$$x = u + v, \qquad y = u - v, \qquad z = uv, \qquad u, v \in \mathbf{R},$$

u točki $M\,(u = 2,\ v = 1)$.

251. Naći tangentnu ravninu i normalu u točki $M = (1,\ 3,\ 4)$ plohe:

$$x = u, \qquad y = u^2 - 2v, \qquad z = u^3 - 3uv, \qquad u, v \in \mathbf{R}.$$

252. Zadana je ploha (kružni stožac $S \setminus \{V\}$):

$$\vec{r} = \{u\cos v,\ u\sin v,\ au\}, \qquad u \in \mathbf{R}, \qquad v \in [0, 2\pi].$$

a) napisati jednadžbu tangentne ravnine i normale u proizvoljnoj točki $(u_0,\ v_0)$;

b) napisati jednadžbu tangentne ravnine, normale i tangente na krivulju $u = 2$ u točki $\left(u = 2,\ v = \frac{\pi}{4}\right)$.

253. Zadana je ploha:

$$\vec{r} = \{u + \cos v,\ u - \sin v,\ \lambda u\}, \qquad u, v \in \mathbf{R},$$

i njena točka $M\left(u = 1,\ v = \dfrac{\pi}{2}\right)$.

a) napisati jednadžbu normale ravnine i tangente na krivulje $u = 1$, $v = \dfrac{\pi}{2}$ u točki M;

b) naći kut između krivulja $u = 1$, $v = \dfrac{\pi}{2}$;

c) pokazati da tangenta u točki M na krivulju $u = \sin v$ jest ujedno i tangenta na krivulju $u = 1$ u toj istoj točki.

254. Na plohi:

$$\vec{r} = \{u \cos v,\ u \sin v,\ 2 \ln u\}, \qquad u \geqslant 0, \qquad v \in \mathbf{R},$$

zadana je krivulja $\alpha : I \to \mathbf{R} : u = \mathrm{e}^{v}$. Napisati jednadžbu plohe u obliku $F(x, y, z) = c$, te pokazati da je u svakoj točki krivulje tangentna ravnina plohe ujedno i oskulaciona ravnina zadane krivulje.

255. Kako glase jednadžbe tangentnih ravnina plohe:

$$\vec{r} = \{u,\ u + v,\ u^2 + v^2\}, \qquad u, v \in \mathbf{R},$$

koje prolaze pravcem $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z-1}{10}$?

256. Ploha $xyz = a^2$ u proizvoljnoj točki (x_0, y_0, z_0)

ima tangentnu ravninu: $\dfrac{x}{x_0} + \dfrac{y}{y_0} + \dfrac{z}{z_0} = 3$

i normalu: $\dfrac{x - x_0}{y_0 z_0} = \dfrac{y - y_0}{x_0 z_0} = \dfrac{z - z_0}{x_0 y_0}$. Dokazati.

257. Naći vektorsku i skalarnu jednadžbu tangentne ravnine kružnog valjka:

$$\vec{r} = \{R \cos v,\ R \sin v,\ u\}, \qquad u \in \mathbf{R}, \qquad v \in [0, 2\pi].$$

U zadacima od 258. do 260. napisati jednadžbe tangentnih ravnina i normala sljedećih ploha u danim točkama:

258. $z = x^3 + y^3$ u točki $M = (1, 2, 9)$.

259. $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ u točki $M = (3, 4, 12)$.

260. $x^2 - 2y^2 - 3z^2 - 4 = 0$ u točki $M = (3, 1, -1)$.

261. Napisati jednadžbu tangentne ravnine na pseudosferu:

$$x = a \sin u \cos v, \qquad y = a \sin u \sin v,$$

$$z = a\left(\ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} + \cos u\right), \qquad u \geqslant 0, \qquad v \in [0, 2\pi].$$

262. Napisati jednadžbu tangentne ravnine na torus:

$$x = (1 + 5\cos u)\cos v, \qquad y = (1 + 5\cos u)\sin v$$
$$z = 5\sin u, \qquad u,\ v \in [0, 2\pi],$$

u točki $M(u, v)$ za koju je $\cos u = \frac{3}{5}$,

$$\cos v = \frac{4}{5}, \quad \left(u > 0, \quad v < \frac{\pi}{2}\right).$$

263. Iz točke M na plohi:

$$x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi, \quad z^2 = -r^2 + f(r\,e^{\phi}), \quad r,\ \phi \in \mathbf{R},$$

$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ realna funkcija, povući normalu MN do točke N, koja je probodište normale s ravninom XOY.
Naći kut između pravca ON i pravca OP, gdje je P projekcija točke M na ravninu XOY.

264. Dana je ploha $S: \vec{r} = \left\{u, v, k \operatorname{arc\,tg}\frac{v}{u}\right\}$, $u,\ v \in \mathbf{R}$, i krivulja $\alpha: \mathbf{R} \to S: r = \{a\cos u, a\sin u, g(u)\}$, $k, a > 0$, $g(u)$ je realna funkcija. Odrediti $g(u)$ tako da krivulja leži na danoj plohi, a zatim pokazati da se tangentna ravnina plohe i oskulaciona ravnina krivulje u svim točkama poklapaju.

265. Dana je ploha $S: \vec{r} = \{v\cos u,\ v\sin u,\ v\sqrt{2}\}$, $u, v \in \mathbf{R}$.

a) Naći v kao funkciju od u za one krivulje $\alpha: \mathbf{R} \to S$ na plohi S kod kojih tangente zatvaraju s osi OZ kut od $\frac{\pi}{4}$.

b) Naći onu od tih krivulja koja prolazi točkom $(1, 0, \sqrt{2})$.

Rješenja

248. $12x-9y+2z-9=0.$

249. $18x+3y-4z-41=0.$

250. $3x-y-2z-4=0,\quad \frac{x-3}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{-2}.$

251. $6x+3y-2z-7=0,\quad \frac{x-1}{6}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-4}{-2}.$

252. a) $ax\cos v_0+ay\sin v_0-z=0;$

$$\frac{x-x_0}{\cos v_0}=\frac{y-y_0}{\sin v_0}=-a(z-z_0);$$

b) $x+y-\frac{\sqrt{2}}{a}z=0;\quad \frac{x-\sqrt{2}}{1}=\frac{y-\sqrt{2}}{1}=\frac{a(z-2a)}{-\sqrt{2}};$

i tangenta na krivulju $u=2$:

$$\frac{x-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}=\frac{y-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{z-2a}{0}.$$

253. a) na krivulju $u=1$:

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{0}=\frac{z-\lambda}{0},\qquad (x-1)=0:$$

na krivulju $v=\frac{\pi}{2}$:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-\lambda}{\lambda},\qquad (x-1)+y+\lambda(z-\lambda)=0;$$

b) $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2+\lambda^2}}.$

254. $x^2+y^2=e^z;\qquad 2\cos vx+2\sin vy-uz-2u(1-\ln u)=0.$

255. $x+2y-z-7=0.$

257. $x\cos v+y\sin v-a=0,\quad \vec{r}\cdot\vec{e}(v)-a=0,$
ako uzmemo: $\vec{r}=xi+y\vec{j}+z\vec{k},\ \vec{e}(v)=\cos v\,\vec{i}+\sin v\,\vec{j}.$

258. $3x+12y-z-18=0;\quad \frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{12}=\frac{z-9}{-1}.$

259. $3x+4y+12z-169=0;\quad \frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-12}{12}.$

260. $3x-2y+3z-4=0;\quad \frac{x-3}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{3}.$

261. $x\cos u\cos v+y\cos u\sin v-z\sin u+a\ln\operatorname{tg}\frac{u}{2}\sin u=0.$

262. $12x+9y+20z-140=0.$

263. Koordinate točke N su: $x=e^{\phi}\dot{f}(\cos\phi-\sin\phi),\ y=\frac{1}{2}e^{\phi}\dot{f}(\cos\phi+\sin\phi);\alpha=45°.$

264. $g(u)=ku;$ tangentna ravnina:

$$kvX-kuY+(u^2+v^2)Z-k(u^2+v^2)\operatorname{arctg}\frac{v}{u}=0\quad \text{i}$$

oskulaciona ravnina: $k\sin uX-k\cos uY+aZ-kau=0$

u zajedničkim točkama, tj. za $u=a\cos u,\ v=a\sin u$ se poklapaju.

265. a) $v=e^{c\pm u};\quad \vec{r}=\{e^{\pm u}\cos u,\quad e^{\mp u}\sin u,\quad \sqrt{2}e^{\pm u}\}.$